绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设 $z=\dfrac{1-i}{1+i}+2i$，则 $|z|=$

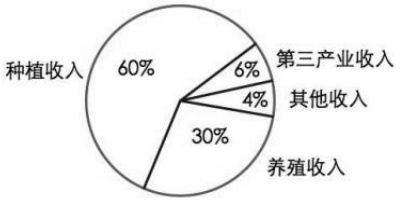
A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

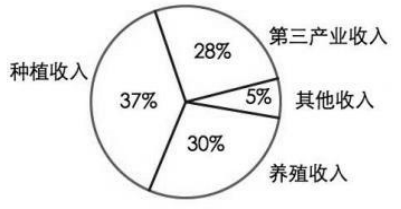
2．已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-x-2>0\right\}$，则 $\complement_{\mathbb{R}}A=$

A．$\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$　　B．$\left\{x\middle|-1\le x\le 2\right\}$

C．$\left\{x\middle|x<-1\right\}\cup\left\{x\middle|x>2\right\}$　　D．$\left\{x\middle|x\le -1\right\}\cup\left\{x\middle|x\ge 2\right\}$

3．某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番.为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例，得到如下饼图：





建设前经济收入构成比例　　建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是

A．新农村建设后，种植收入减少

B．新农村建设后，其他收入增加了一倍以上

C．新农村建设后，养殖收入增加了一倍

D．新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4．记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和.若$3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则$a_5=$

A．-12　　B．-10　　C．10　　D．12

5．设函数$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$.若$f(x)$为奇函数，则曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为

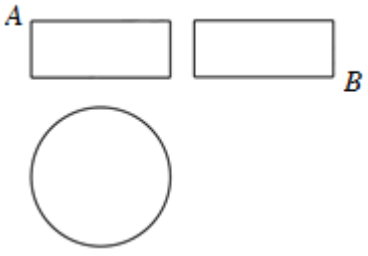
A．$y=-2x$　　B．$y=-x$　　C．$y=2x$　　D．$y=x$

6．在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\overrightarrow{EB}=$

A．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7．某圆柱的高为2，底面周长为16，其三视图如图．圆柱表面上的点M在正视图上的对应点为A，圆柱表面上的点N在左视图上的对应点为B，则在此圆柱侧面上，从M到N的路径中，最短路径的长度为



A．$2\sqrt{17}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．3　　D．2

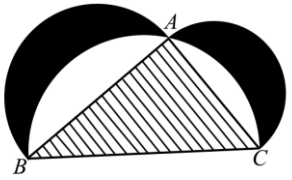
8．设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过点（–2，0）且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M，N 两点，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$ =

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$．若 g（x）存在 2 个零点，则 a 的取值范围是

A．[–1，0）　　B．[0，+∞）　　C．[–1，+∞）　　D．[1，+∞）

10．下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形．此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB，AC．$\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为Ⅲ．在整个图形中随机取一点，此点取自Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的概率分别记为 p_1，p_2，p_3，则



A．$p_1=p_2$　　B．$p_1=p_3$

C．$p_2=p_3$　　D．$p_1=p_2+p_3$

11．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，O 为坐标原点，F 为 C 的右焦点，过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M、N.若 $\triangle OMN$ 为直角三角形，则$|MN|$=

A．$\frac{3}{2}$　　B．3　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

12．已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为

A．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2\le 0 \\ x-y+1\ge 0 \\ y\le 0 \end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

14．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $S_n=2a_n+1$，则 $S_6=$_____.

15．从 2 位女生，4 位男生中选 3 人参加科技比赛，且至少有 1 位女生入选，则不同的选法共有_____种.（用数字填写答案）

16．已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小值是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17．（12 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求 $\cos\angle ADB$；

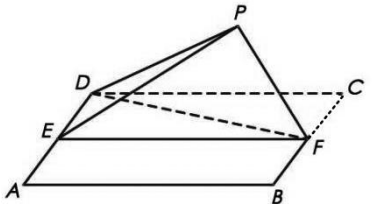
（2）若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC.

18．（12 分）

如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，E,F 分别为 AD,BC 的中点，以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使点 C 到达点 P 的位置，且 $PF\perp BF$.

（1）证明：平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$；

（2）求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



19．（12 分）

设椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F的直线l与C交于A,B两点，点M的坐标为$(2,0)$.

（1）当l与x轴垂直时，求直线AM的方程；

（2）设O为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

20.（12 分）

某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品．检验时，先从这箱产品中任取 20 件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验，设每件产品为不合格品的概率都为$p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立．

（1）记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为$f(p)$,求$f(p)$的最大值点p_0.

（2）现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品，以（1）中确定的p_0作为p的值．已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用．

（i）若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为X，求EX；

（ii）以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

21.（12 分）

已知函数$f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$存在两个极值点x_1,x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计

分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$.以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.

（1）求 C_2 的直角坐标方程；

（2）若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点，求 C_1 的方程.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立，求 a 的取值范围.

参考答案：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	B	D	A	B	D	C	A	B	A

13.6　14.-63　15.16　16.$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

17.（12 分）

解：（1）在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$.

由题设知，$\frac{5}{\sin 45°}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，所以$\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知，$\angle ADB<90°$，所以$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

（2）由题设及（1）知，$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得

$BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC$

$=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}$

$=25$.

所以$BC=5$.

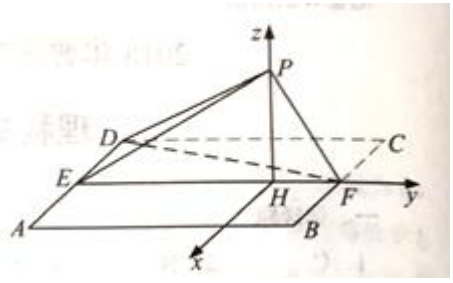
18.（12 分）

解：（1）由已知可得，$BF\perp PF$，$BF\perp EF$，所以$BF\perp$平面PEF.

又 $BF\subset$ 平面 $ABFD$，所以平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$.

（2）作 $PH\perp EF$，垂足为 H.由（1）得，$PH\perp$ 平面 $ABFD$.

以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HF}$ 的方向为 y 轴正方向，$|\overrightarrow{BF}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $H-xyz$.



由（1）可得，$DE\perp PE$.又 $DP=2$，$DE=1$，所以 $PE=\sqrt{3}$.又 $PF=1$，$EF=2$，故 $PE\perp PF$.

可得 $PH=\frac{\sqrt{3}}{2},EH=\frac{3}{2}$.

则 $H(0,0,0),P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}),D(-1,-\frac{3}{2},0),\overrightarrow{DP}=(1,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \overrightarrow{HP}=(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 为平面 $ABFD$ 的法向量.

设 DP 与平面 $ABFD$ 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\frac{\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{DP}|}|=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

19.（12 分）

解：（1）由已知得 $F(1,0)$，l 的方程为 $x=1$.

由已知可得，点 A 的坐标为 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 AM 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$.

（2）当 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0°$.

当 l 与 x 轴垂直时，OM 为 AB 的垂直平分线，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $x_1<\sqrt{2},x_2<\sqrt{2}$，直线 MA，MB 的斜率之和为 $k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$.

由 $y_1=kx_1-k,y_2=kx_2-k$ 得

$$k_{MA}+k_{MB}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

将 $y=k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0.$$

所以，$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

则 $2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k=\frac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$.

从而 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故 MA，MB 的倾斜角互补，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

综上，$\angle OMA=\angle OMB$.

20.（12 分）

解：（1）20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)=C_{20}^2p^2(1-p)^{18}$.因此

$f'(p)=C_{20}^2[2p(1-p)^{18}-18p^2(1-p)^{17}]=2C_{20}^2p(1-p)^{17}(1-10p)$.

令 $f'(p)=0$，得 $p=0.1$.当 $p\in(0,0.1)$ 时，$f'(p)>0$；当 $p\in(0.1,1)$ 时，$f'(p)<0$.

所以 $f(p)$ 的最大值点为 $p_0=0.1$.

（2）由（1）知， $p=0.1$.

（i）令 Y 表示余下的 180 件产品中的不合格品件数，依题意知 Y： $B(180,0.$，

$X=20\times2+25Y$，即 $X=40+25Y$.

所以 $EX=E(40+25Y)=40+25EY=490$.

（ii）如果对余下的产品作检验，则这一箱产品所需要的检验费为 400 元.

由于 $EX>400$，故应该对余下的产品作检验.

21.（12 分）

解:（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

（i）若 $a\le2$，则 $f'(x)\le0$，当且仅当 $a=2$， $x=1$ 时 $f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

（ii）若 $a>2$，令 $f'(x)=0$ 得， $x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})\cup(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 时， $f'(x)<0$；

当 $x\in(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时， $f'(x>)$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}),(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 单调递减，在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 单调递增.

（2）由（1）知， $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$.

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1,x_2 满足 $x^2-ax+1=0$，所以 $x_1x_2=1$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$.

由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2},$$

所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数 $g(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，由（1）知，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，又 $g(1)=0$，从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$.

所以 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

解:（1）由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得 C_2 的直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=4$.

（2）由（1）知 C_2 是圆心为 $A(-1,0)$，半径为 2 的圆.

由题设知，C_1 是过点 $B(0,2)$ 且关于 y 轴对称的两条射线．记 y 轴右边的射线为 l_1，y 轴左边的射线为 l_2．由于 B 在圆 C_2 的外面，故 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点等价于 l_1 与 C_2 只有一个公共点且 l_2 与 C_2 有两个公共点，或 l_2 与 C_2 只有一个公共点且 l_1 与 C_2 有两个公共点.

当 l_1 与 C_2 只有一个公共点时，A 到 l_1 所在直线的距离为 2，所以 $\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故 $k=-\frac{4}{3}$ 或 $k=0$.

经检验，当 $k=0$ 时，l_1 与 C_2 没有公共点；当 $k=-\frac{4}{3}$ 时，l_1 与 C_2 只有一个公共点，l_2 与 C_2 有两个公共点.

当 l_2 与 C_2 只有一个公共点时，A 到 l_2 所在直线的距离为 2，所以 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$.

经检验，当$k=0$时，l_1与C_2没有公共点；当$k=\frac{4}{3}$时，l_2与C_2没有公共点.

综上，所求C_1的方程为$y=-\frac{4}{3}|x|+2$.

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

解：（1）当$a=1$时，$f(x)=|x+1|-|x-1|$，即$f(x)=\begin{cases}-2, x\le -1,\\ 2x, -1<x<1,\\ 2, x\ge 1.\end{cases}$

故不等式$f(x)>1$的解集为$\{x|x>\frac{1}{2}\}$.

（2）当$x\in(0,1)$时$|x+1|-|ax-1|>x$成立等价于当$x\in(0,1)$时$|ax-1|<1$成立.

若$a\le 0$，则当$x\in(0,1)$时$|ax-1|\ge 1$；

若$a>0$，$|ax-1|<1$的解集为$0<x<\frac{2}{a}$，所以$\frac{2}{a}\ge 1$，故$0<a\le 2$.

综上，a的取值范围为$(0,2]$.