高考数学复习点拨：浅析求圆锥曲线离心率策略（五）

【利用曲线及图形的几何性质构建关于e的不等式，求e的取值范围】

利用曲线及图像的几何性质列不等式，即题设条件中会给出列不等式关系的条件，如：
1.XX 的距离大于或小于 XX 的距离；
2.曲线上存在 X 点是的 XXX；
3.X 点在椭圆或圆的内部或外部（若为椭圆中的焦点三角形，当动点 P 在椭圆的上、下定点时，$\angle F_1PF_2$ 最大）；

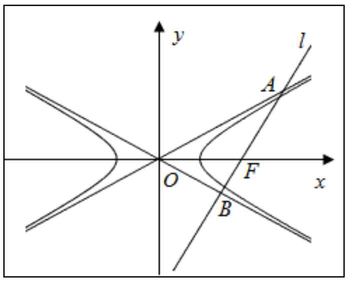
4.或给出角的范围等条件；

5.或分析圆锥曲线中的几何图形的几何性质，结合这些条件可列出不等关系，并结合 a,b,c 之间的关系，求解 e 的取值范围

例 6 例 3：如图所示，已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 交双曲线的渐近线于 A,B 两点，且直线 l 的倾斜角是渐近线 OA 倾斜角的 2 倍，若 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】：本题没有焦半径的条件，考虑利用点的坐标求解，则将所涉及的点坐标尽力用 a,b,c 表示，再寻找一个等量关系解出 a,b,c 的关系。双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，由直线 l 的倾斜角是渐近线 OA 倾斜角的 2 倍



可得：$k_{OA}=\dfrac{\frac{2b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$，确定直线 l 的方程为

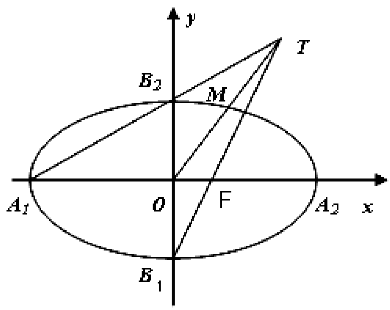
$y=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\left(x-c\right)$，与渐近线联立方程得

$$\begin{cases} y=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\left(x-c\right) \\ y=\pm\dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow y=-\dfrac{2abc}{3a^2-b^2}\ or\ y=\dfrac{2abc}{a^2+b^2}$$ 将 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 转化为坐标语言，

则 $y_A=-2y_B$，即 $\dfrac{2abc}{a^2+b^2}=2\cdot\dfrac{2abc}{3a^2-b^2}$，解得 $a:b:c=\sqrt{3}:1:$，从而 $e=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

例 7 例 5：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A_1,A_2,B_1,B_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的四个顶点，F 为其右焦点，直线 A_1B_2 与直线 B_1F 相交于点 T，线段 OT 与椭圆的交点 M 恰为线段 OT 的中点，则该椭圆的离心率为__________.

【解析】：本题涉及的条件多与坐标有关，很难联系到参数的几何意义，所以考虑将点的坐标用 a,b,c 进行表示，在利用条件求出离心。首先直线 A_1B_2,B_1F 的方程含 a,b,c，联立方程后交点 T 的坐标可用 a,b,c 进行表示（$T\left(\frac{2ac}{a-c},\frac{b\left(a+c\right)}{a-c}\right)$），则 OT 中点 $M\left(\frac{ac}{a-c},\frac{b\left(a+c\right)}{2\left(a-c\right)}\right)$，再利用 M 点在椭圆上即可求出离心率 e



解：直线 A_1B_2 的方程为：$\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$；

直线 B_1F 的方程为：$\frac{x}{c}+\frac{y}{-b}=1$，联立方程可得：$\begin{cases}bx-ay=-ab\\cy-bx=-bc\end{cases}$

解得：$T(\frac{2ac}{a-c},\frac{b(a+c)}{a-c})$，

则 $M(\frac{ac}{a-c},\frac{b(a+c)}{2(a-c)})$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，

$$\frac{c^2}{(a-c)^2}+\frac{(a+c)^2}{4(a-c)^2}=1,c^2+10ac-3a^2=0,e^2+10e-3=0$$

解得：$e=2\sqrt{7}-5$

例 8 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 $F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$，若椭圆上存在点 P 使 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$，则该椭圆的离心率的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\sqrt{2}-1\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D. $\left(\sqrt{2}-1,1\right)$

【解析】：$\angle PF_1F_2,\angle PF_2F_1$ 为焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$ 的内角，且对边为焦半径 $\left|PF_2\right|,\left|PF_1\right|$，所以利用正弦定理对等式变形：$\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}\Rightarrow\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{\left|PF_1\right|}{\left|PF_2\right|}=\frac{c}{a}$，

再由$\left|PF_2\right|+\left|PF_1\right|=2a$解得：$\left|PF_2\right|=\dfrac{2a^2}{a+c}$，再利用焦半径的范围为$\left(a-c,a+c\right)$可得（由于依题意，$P$非左右顶点，所以焦半径取不到边界值$a-c,a+c$）：

$$a-c<\frac{2a^2}{a+c}<a+c \Rightarrow \begin{cases} a^2-c^2<2a^2 \\ 2a^2<a^2+2ac+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2>-c^2 \\ e^2+2e-1>0 \end{cases}$$，解得$e\in\left(\sqrt{2}-1,1\right)$

例 9 设点A_1,A_2分别为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左右焦点，若在椭圆上存在异于点$A_1,A_2$的点$P$，使得$PO\perp PA_2$，其中$O$为坐标原点，则椭圆的离心率$e$的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

【解析】：本题取值范围的突破口在“椭圆上存在点P”，则P的横纵坐标分别位于$\left(-a,a\right),\left(-b,b\right)$中，所以致力于计算$P$的坐标，设$P\left(x_0,y_0\right)$，题目中$A_2\left(a,0\right)$，由$PO\perp PA_2$可得$P$也在以$OA_2$为直径的圆上。即$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$，所以联立方程：

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-ax+b^2=0$$，即$\dfrac{c^2}{a^2}x^2-ax+b^2=0$，由已知可得$A_2\left(a,0\right)$也是圆与椭圆的一个交点，所以由韦达定理可得：$ax_0=\dfrac{a^2b^2}{c^2}\Rightarrow x_0=\dfrac{ab^2}{c^2}$，再根据$x_0$的范围可得：$-a<\dfrac{ab^2}{c^2}<a\Rightarrow b^2<c^2\Rightarrow a^2-c^2<c^2\Rightarrow e^2>\dfrac{1}{2}$，解得$e\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$