高考数学复习点拨：浅析求圆锥曲线离心率策略（三）

采用离心率的定义以及圆锥曲线的定义求解

若椭圆或双曲线上由一点 P ，能得到 $|PF_1|,|PF_2|$ 与 c 的关系，则可利用椭圆与双曲线的定义来求解离心率.

例 4　椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(0<b<2\sqrt{3}\right)$ 与渐近线为 $x\pm 2y=0$ 的双曲线有相同的焦点 F_1,F_2，P 为它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2=90^{\circ}$, 则椭圆的离心率为________

【解析】：本题的突破口在于椭圆与双曲线共用一对焦点，设 $F_1F_2=2c$，在双曲线中，$\dfrac{b'}{a'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a':b':c=2:1:\sqrt{5}$，不妨设 P 在第一象限，则由椭圆定义可得：$PF_1+PF_2=4\sqrt{3}$，由双曲线定义可得：$PF_1-PF_2=2a'=\dfrac{4}{\sqrt{5}}c$，因为 $\angle F_1PF_2=90^{\circ}$，

$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$ 而 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=\dfrac{\left(PF_1+PF_2\right)^2+\left(PF_1-PF_2\right)^2}{2}$

代入可得：$48+\dfrac{16c^2}{5}=8c^2\Rightarrow c=\sqrt{10}$　　$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

【变式训练 2】已知 F_1,F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为（　　）

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　C. 3　　　D. 2

【解析】：设椭圆半长轴长为 a_1，双曲线半实轴长为 a_2，椭圆，双曲线离心率分别为 e_1,e_2

不妨设 P 在第一象限

由双曲线与椭圆性质可得：$|PF_1|+|PF_2|=2a_1,|PF_1|-|PF_2|=2a_2$

由余弦定理可得：$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos F_1PF_2$

$$=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1||PF_2|$$

代入$|PF_1|^2+|PF_2|^2=\frac{1}{2}\left[\left(|PF_1|+|PF_2|\right)^2+\left(|PF_1|-|PF_2|\right)^2\right]=2\left(a_1^2+a_2^2\right)$

$|PF_1||PF_2|=\frac{1}{4}\left[\left(|PF_1|+|PF_2|\right)^2-\left(|PF_1|-|PF_2|\right)^2\right]=a_1^2-a_2^2$可得：

$4c^2=3a_1^2+a_2^2\Rightarrow 4=\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}$

由柯西不等式可得：$4=\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=\frac{\frac{1}{e_1^2}}{1}+\frac{\frac{1}{e_2^2}}{\frac{1}{3}}\geq\frac{\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2}{1+\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\leq\frac{4\sqrt{3}}{3}$